**Annexe 7.6 Tempéraments dorés** (fiction récréative à lecture facultative)

Autorisons-nous un voyage au domaine du rêve et de l’expérimentation. Nous avons jusqu’à présent recherché un système d’accord impliquant la valeur Φ. Je ne me suis jamais lassé d’accorder des pianos ou d’autres instruments du reste, même si pour ces autres l’exercice puisse paraître plus banal. J’éprouve un réel plaisir à réaliser cet équilibre. Mais des questions subsistent. De combien ai-je agrandi les intervalles de sixtes mineures lors de cette première remise en cause ? De combien est-il possible de les agrandir sans déséquilibrer l’échelle ? Jusqu’où peut-on « étirer » la sixte mineure et modifier la tierce qui lui correspond, et en conséquence l’octave qui résulte de leur somme ? D’où nous vient, en dehors du fait inharmonique que nous allons bientôt aborder, ce besoin de dilater les octaves vers l’aigu et inversement mais plus légèrement vers le grave[[1]](#footnote-1) ?

Houten et Basberger[[2]](#footnote-2) ont bien montré à quel point il importait pour Jean Sébastien Bach de lier musique et nombre. Par exemple, dans le *Prélude et fugue n°1 en ut majeur* du Clavier Bien Tempéré, les traces ne manquent pas pour illustrer la volonté du compositeur d’introduire le nombre dans ses compositions :

Le prélude totalise 549 notes, la fugue 734 (…) donc 1283 = Bach [car a=1 b=2 c=3…h=8]

Le thème de la fugue se compose de 14 notes = Bach [car 1+2+3+8 = 14]

Ainsi de suite…

Bien des compositeurs[[3]](#footnote-3), Bach quasi systématiquement, ont recouru au nombre d’or dans leurs compositions, même si l’usage qu’ils firent de ce rapport se cantonna le plus souvent à la structuration des œuvres, à leur architecture, convaincus qu’ils étaient que cette proportion particulière intervenait déjà dans la musique. En effet, il existe un lien étroit entre les rapports de fréquences qui se déduisent notamment de la gamme de Zarlino. Cette gamme dite aussi « naturelle » ou encore « gamme des physiciens » comporte cependant des rapports d’intervalles communs avec la gamme de Pythagore : unisson 1/1 ; octave 2/1 ; quinte 3/2 et quarte 4/3. L’originalité réside dès lors dans les rapports de tierce mineure 6/5 ; tierce majeure 5/4 ; sixte mineure 8/5 et sixte majeure 5/3. Ces rapports produisent par eux-mêmes une suite numériquement esthétique, qui évoque immanquablement le début de celle de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8…d’où l’idée de la présence du nombre d’or.

|  |  |
| --- | --- |
| Unisson | 1/1 |
| Octave | 2/1 |
| Quinte | 3/2 |
| Quarte | 4/3 |
| Tierce mineure | 5/4 |
| Tierce majeure | 6/5 |
| Sixte mineure | 8/5 |
| Sixte majeure | 5/3 |

Toujours inspirée de Fibonacci, une autre méthode a consisté pour les compositeurs à dorer leur œuvre, privilégiant des intervalles dont le nombre de demi-tons apparaît dans la fameuse suite.

|  |  |
| --- | --- |
| Seconde mineure | 1 |
| Seconde majeure | 2 |
| Tierce mineure | 3 |
| Quarte | 5 |
| Sixte mineure | 8 |
| Neuvième mineure | 13 |

Mais à vrai dire, cette présence n’est que suggérée. En effet, hors mis le rapport 8/5 qui donne un quotient de 1,6 proche du nombre d’or, cette proportion n’apparaît pas véritablement. Ce n’est que plus tard dans la fameuse série qu’il apparaîtra.

L’idée de concevoir des systèmes qui reposeraient plus sûrement sur le nombre d’or n’est pourtant pas nouvelle, Jedrzejewski[[4]](#footnote-4) nous rappelle la méthode moderne qui passe par une formule établissant la quinte du système acoustique doré, non plus à 700 cents, mais à 696 cents environ.

W = 2 exp. (15-racine de 5) / 22 = 696,214474 cents

C’est à Jacques Dudon[[5]](#footnote-5) que nous devons une proposition de calcul de la valeur du comma doré qui découle selon l’auteur de la non fermeture du cycle des quintes, soit la différence entre sept octaves et douze quintes dorées.

(7 x 1200 cents) – (12 x 696,214474 cents) = 45,4263 cents

Je donne ci-dessous les valeurs des notes de la gamme chromatique de Do (en fournissant les six premiers degrés absents dans l’édition de 2002 de l’ouvrage de Franck Jedrzejewski).

|  |  |
| --- | --- |
| Notes | Cents |
| Do# | 119 |
| Ré | 191 |
| Mib | 312 |
| Mi | 385 |
| Fa | 504 |
| Fa# | 577 |
| Sol | 696 |
| Sol# | 815 |
| La | 887 |
| Sib | 1008 |
| Si | 1081 |

 A tout seigneur tout honneur, voyons s’il est possible de construire de nouveaux systèmes acoustiques, en nous inspirant de la suite de Fibonacci, partant du constat que nous pouvons faire, selon lequel, tout accord réalisé à l’oreille, boucle au final, parvenu aux ultimes fréquences audibles par l’humain, sur un rapport de sixte mineure équivalent ou du moins extrêmement proche du nombre d’or (1,618…).

**Tempérament Fibonacci**

Rappel de la suite de Fibonacci :

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233

Rappel des quotients :

 1 2 1,5 1,66 1,6 1,625 1,615 1,619 1,617 **1,618 1,618 1,618**

On peut poursuivre à l’infinie cette progression. Les rapports successifs obtenus à partir de la dixième valeur, sont stabilisés sur Φ, soit 1,618 tout bien arrondi. Intéressons-nous tout d’abord aux rapports du début de la progression :

1 2 1,5 1,66 1,6 1,625

Le premier rapport 1 correspond au rapport d’unisson.

Le suivant 2 au rapport d’octave.

Puis 1,5 = 3/2 correspond au rapport de quinte.

Ces trois premiers rapports interpellent les « musicomanes ». Le commun des entendeurs entend en effet comme parfait et dans l’ordre : l’unisson (1), l’octave (2/1) et la quinte (3/2 = 1,5).

1,66 = 5/3 correspond au rapport de sixte majeure.

1,6 = 8/5 au rapport de sixte mineure.

Puis, la raison semble s’égarer : 1,625 ; 1,615 ; tournoyant ensuite autour de la valeur Φ, d’abord au-dessus avec 1,619, puis au-dessous 1,617, pour la rejoindre enfin à l’infini. Ma foi, on en perdrait la raison ! Le début de la progression est un peu moins chaotique à l’analyse qu’il n’y parait à première vue. Ces rapports du début de la suite se retrouvent intégrés de fait dans l’accord du clavier : 1, dans tous les unissons (chaque note étant produite par la frappe de trois cordes accordées à l’unisson), 2 dans l’intervalle d’octave qui borne la partition, 1,5 dans le rapport de quinte, autre pierre d’achoppement (à moins de deux millièmes près !).

Les rapports qui suivent 1,6 ; 1,66 ne sont pas intégrés à ce premier octave, mais le seront, jusques et y compris la valeur 1,619 qui réglera un intervalle de sixte mineure au-delà de la septième octave du piano.

Ainsi, il semblerait possible -a priori- de concevoir un tempérament basé sur Φ et inspiré de la suite de Fibonacci.

L’échelle calculée ici se propose de prendre appui sur la fameuse série. Appelons-la Tempérament Fibonacci, en abrégé TFI. Attribuons dans l’ordre de la série, à chaque valeur, une fréquence. Faisons correspondre à la première valeur la fréquence du diapason A = 440hz. Prenons les valeurs suivantes comme multiplicateurs…

1 = 440 2 = 880 3 = 1320 5 = 2200 8 = 3520 etc.

Ramenons les résultats obtenus dans une même octave La3 – La4, soit entre 440hz et 880hz par divisions binaires redoublées autant que nécessaire.

1 vaut 440

2 880

3 1320 660

5 2200 1100 550

8 3520 1760 880 440

13 5720 715

21 9240 577,50

34 14960 467,50

55 24200 756,25

89 39160 611,87

144 63360 495

233 102520 800,93

377 165880 647,96

610 268400 524,21

987 434280 848,20

1597 702680 686,21

Ordonnons les résultats de façon croissante, puis superposons-les à ceux du tempérament égal.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| La3 | Sib | Si | Do | Do# | Ré | Mib | Mi | Fa | Fa# | Sol | Sol# | La4 |  |
| 440 | 467,5 | 495 | 524,21 | 550 | 577,5 | 611,87 | 647,96 | 660 | 715 | 756,25 | 800,93 | 848,2 | 880 |
| 440 | 466,16 | 493,88 | 523,25 | 554,36 | 587,32 | 622,25 | 659,25 | 698,45 | 739,98 | 783,99 | 830,60 | 880 |  |

LE CHAÎNON EXCÉDENT / Treize à la douzaine…

Nous constatons que les tout premiers résultats sont comparables 440 / 440 ; 467 / 466 ; 495 / 493 ; puis insensiblement, les valeurs s’écartent 524 / 538 ; 550 / 554 ; 577 / 587 ; 611 / 622…

Parvenus à la fréquence de 660hz dans le tempérament Fibonaccéen, nous atteignons la fréquence de la note Mi en tempérament égal, tandis que la fréquence s’aligne sur le demi-ton supérieur Fa. En fait, au bout du compte, à l’intérieur de l’octave, nous n’avons pas 12 notes, mais 13 ( !?).

La gamme fonctionne assez bien si on supprime l’intrus. 577,5 semble bien être la valeur intruse, puisque à mi-chemin entre C# et D. Les plus téméraires pourront goûter cet accord débarrassé du chaînon en trop (gare aux oreilles…) !

Est-ce à dire qu’une série Fibonaccéenne ne saurait générer une gamme digne de ce nom ?

DÉBARASSÉS DU CHAÎNON EXCÉDENT

Testons à nouveau cette suite de Fibonacci amputée de ses deux premiers termes en appliquant la valeur 440 (fréquence du diapason) au chiffre 2 qui devient le premier terme. 3 vaudra 660, 5 vaudra 1100 etc. Pouvons-nous cette fois construire une octave de douze notes ?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 440 | 440 | 440 |
| 660 | 660 | 660 |
| 1100 | 1100 | 1100 |
| 1760 | 1760 | 1760 |

Procédons comme plus haut, en ramenant chaque valeur dans une même octave A3 / A4, par divisions binaires autant de fois que nécessaire. Je livre ici les résultats ordonnés :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 440 | 467,5 | 495 | 524,21 | 550 | 611,87 | 647,96 | 660 | 715 | 756,25 | 800,93 | 848,2 | 880 |
| La3 | La#3 | Si3 | Do4 | Do#4 | Ré4 | Mib4 | Mi4 | Fa4 | Fa#4 | Sol4 | Sol#4 | La4 |

Tout à première vue est normal. On apprécie de boucler l’octave sur une valeur du double de la fréquence de départ. On note un mi à la quinte de La3, d’une pureté angélique, puisque 660 / 440 = 3/2. Seulement voilà, ce rapport est notre premier rapport générateur, né des deux premiers termes, 2 et 3.

Hormis cela, c’est une bien curieuse gamme que nous obtenons où les quintes sont à ce point inégales[[6]](#footnote-6).

Mi4 / La3 = 1,5  Fa4 / Sib3 = 1,529  Fa#4 / Si3 = 1,527

Sol4 / Do4 = 1,527 Sol#4 / Do#4 = 1,542 La4 / Ré4 = 1,438 ?! [[7]](#footnote-7)

Inutile d’aller plus loin…bien que nous nous soyons débarrassés du chaînon excédent ! De toute évidence, si sous certains angles la série de Fibonacci n’est pas sans rappeler les lois de la résonance naturelle, il semble déraisonnable de construire sur cette série une gamme complète. Sans doute devons-nous nous inspirer de l’originalité de cette suite qui « tend vers Φ », pour créer un système qui lui aussi « tende vers Φ » en nous limitant à cette tension.

**Tempérament Phi**

Nous avons jusqu’à présent recherché un principe d’accord impliquant la valeur Φ. Nous nous sommes contentés de « tendre vers Φ », en appliquant ce rapport à la dernière sixte mineure de l’extrémité aigüe du piano. Mais qu’adviendra-t-il si nous concevons un tempérament entièrement basé sur Φ. Ce montage particulièrement expérimental est à ma connaissance innovant, même s’il s’avère à priori inexploitable.

Partons du diapason universel La = 440, et considérons Φ = 1,618034.

Multiplions La par Φ, soit  440 × 1,618034 = 711,93.

Dans le tempérament égal les valeurs voisines du résultat obtenu sont :

Fa = 699 (440 × 1,05946318) Fa# = 739,98 (440 × 1,05946319)

Or, 699 < 711,93 < 739,98

La valeur la plus proche est donc Fa, c’est-à-dire la sixte mineure de La, en d’autres termes, la note se trouvant au dessus de La à une distance de huit demi-tons.

Recherchons le coefficient qui nous permettra de calculer les autres hauteurs de notes, sachant que nous voulons obtenir une gamme à demi-tons égaux.

Soit :  = 1,061997

Ce résultat est supérieur à celui du TE (1,0594631) et à celui du TEQJ (1,059634), ce qui devrait au final nous donner une octave largement agrandie par rapport à ces deux systèmes, une échelle en hyper expansion.

Dressons la gamme chromatique dorée La3 / La4 :

La3 = 440

La#3 = 467,27

Si3 = 496,24

Do4 = 527,01

Do#4 = 559,68

Ré4 = 594,38

Mib4 = 631,23

Mi4 = 670,37

Fa4 = 711,93

Fa#4 = 756,07

Sol4 = 802,94

Sol#4 = 852,72

La4 = 905,59

Les rapports de fréquences sont très précisément les suivants :

|  |  |
| --- | --- |
| 1,061979 | Demi-ton |
| 1,1277994 | Seconde mineure |
| 1,19769928 | Seconde majeure |
| 1,27193148 | Tierce mineure |
| 1,35076452 | Tierce majeure |
| 1,35076452 | Quarte |
| 1,43448355 | Quinte diminuée |
| 1,52339141 | Quinte |
| 1,61780969 | Sixte mineure |
| 1,71807991 | Sixte majeure |
| 1,82456479 | Septième mineure |
| 1,93764949 | Septième majeure |
| 2,05774307 | Octave |

Nous obtenons donc la fréquence La4 à une hauteur 2,058 fois supérieure à la fréquence de départ La3 = 440.

Nous pouvons calculer toutes les autres notes. Exemples :

La2 = 

La#4 = 467,27 2,058 = 961,64 etc.

Assurons-nous que notre suite repose intégralement sur Φ. Pour cela, toutes les sixtes mineures doivent en résulter.

F#4 / A#3 = 

G4  / B3 =  etc.

Pas de doute le tempérament est entièrement doré !

Calculons les fréquences dans les différentes gammes du piano (et au-delà vers l’aigu à la limite du *la7*, neuvième *la* d’un clavier de 96 notes) :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **La-1 à Sol# 0** | **La0 à** **Sol# 1** | **La1 à Sol# 2** | **La2 à Sol# 3** | **La3 à Sol# 4** | **La4 à Sol# 5** | **La5à Sol# 6** | **La6 à Sol# 7** |
| **La** | 24,52 | 50,46 | 103,87 | 213,78 | 440 | 905,59 | 1863,85 | 3836,10 |
| **Sib** | 26,04 | 53,59 | 110,31 | 227,03 | 467,27 | 961,73 | 1979,40 | 4073,93 |
| **Si** | 27,65 | 56,91 | 117,14 | 241,10 | 496,24 | 1021,35 | 2102,12 | 4326,50 |
| **Do** | 29,37 | 60,44 | 124,41 | 256,06 | 527,01 | 1084,67 | 2232,44 | 4594,73 |
| **Do#** | 31,19 | 64,19 | 132,12 | 271,93 | 559,68 | 1151,92 | 2370,85 | 4879,59 |
| **Ré** | 33,12 | 68,17 | 140,31 | 288,79 | 594,38 | 1223,34 | 2517,83 | 5182,11 |
| **Mib** | 35,17 | 72,40 | 149,01 | 306,69 | 631,23 | 1299,18 | 2673,93 | 5503,39 |
| **Mi** | 37,35 | 76,89 | 158,25 | 325,71 | 670,37 | 1379,73 | 2839,71 | 5844,58 |
| **Fa** | 39,67 | 81,65 | 168,06 | 345,90 | 711,93 | 1465,27 | 3015,76 | 6206,93 |
| **Fa#** | 42,13 | 86,72 | 178,48 | 367,35 | 756,07 | 1556,11 | 3202,73 | 6591,74 |
| **Sol** | 44,74 | 92,09 | 189,55 | 390,12 | 802,94 | 1652,58 | 3401,29 | 7000,40 |
| **Sol#** | 47,52 | 97,80 | 201,30 | 414,31 | 852,72 | 1755,04 | 3612,16 | 7434,41 |

DE L’APPARITION DE QUELQUES CURIOSITÉS DORÉES

Prenons la fréquence La3 pour référence.

Considérons divers intervalles à l’intérieur de l’octave La3 \_ La4 :

La#3 / La3

$\frac{467,27 }{440}=1,0619$. Or, 1,06198 = 1,617788…

Si3 / La3

$\frac{496,24 }{440}=1,1278$. Or, 1,12784 = 1,617813…

Do4 / La3

$\frac{527,01 }{440}=1,1977$. Or,$ \frac{1,618}{1,35}=1,1977$. (Pour 1,35 voir Ré4 / La3).

Do#4 / La3

$\frac{559,68 }{440}=1,272$. Or, $1,272=\sqrt{Φ}$. Tan (51,83°). (Chéops).

Ré4 / La3

$\frac{594,38 }{440}=1,35$. Or, $\frac{1,35}{Φ}×π=2,619$*.* Soit : $Φ^{2}$

Mi4 / La3

$\frac{670,37 }{440}=1,523$. Or, $\frac{π}{2,058}=1,525$.

Fa4 / La3

$\frac{711,93 }{440}=1,618$. $Φ=1,618$. De même pour toutes les sixtes mineures, comme vu plus haut, ce quotient étant le module de construction de cette échelle musicale.

Fa#4 / La3

$\frac{756,07}{440}=1,718$. Or, $\frac{1,618}{\sqrt[8]{Φ}}=1,718$.

Sol4 / La3

$\frac{802,94}{440}=1,824$. Or, $\frac{1,824}{1,618}=1,127 $; et $1,127^{4}=1,618$.

Sol#4 / La3

$\frac{852,72}{440}=1,938$. Or, $\frac{π}{Φ}=1,94$.

La4 / La3

$\frac{905,59}{440}=2,058$. Or, $Φ×\sqrt{Φ}=2,058$.

Considérons d’autres intervalles au-delà de l’octave A4 / A3

Mi5 / La3

$\frac{1379,73}{440}=3,1357$. Or, $π=3,14$, comme $\sqrt{3}–\sqrt{2}=3,14$.

Do6 / La3

$\frac{2232,44}{440}=5,073$. Or, $π×Φ=5,08$.

Do#5 / La3

$\frac{1151,92 }{440}=2,618$. Or,$ Φ²=2,618$, comme $Φ+1$.

La5 / La3

$\frac{1863,85 }{440}=4,23$. Or, $Φ^{3}=4,23$.

Fa6 / La3

$\frac{3015,76 }{440}=6,85$. Or, $Φ^{4}=6,85$

Do#7 / La3

$\frac{4879,59 }{440}=11,08$. Or, $Φ^{5}=11,09$

Do#3 / La3

$\frac{271,93 }{440}=0,618$. Or, $\frac{1}{Φ}=0,618 $ou encore$\frac{Φ}{Φ^{2}}$. Cos (51,83°). (Chéops).

Fa2 / La3

$\frac{168,08}{440}=0,382$. Or, $\frac{1}{Φ^{2}}=0,382$ ou encore$\frac{Φ}{Φ^{3}}$.

La1 / La3

$\frac{103,87}{440}=0,236$. Or, $\frac{1}{Φ^{3}}=0,236$ ou encore$\frac{Φ}{Φ^{4}}$.

Do#1 / La3

$\frac{64,19}{440}=0,145$. Or, $\frac{1}{Φ^{4}}=0,145$ ou encore $\frac{Φ}{Φ^{5}}$.

Fa0 / La3

$\frac{39,67}{440}=0,0901$. Or, $\frac{1}{Φ^{5}}=0,0902$ ou encore $\frac{Φ}{Φ^{6}}$.

La-1 / La3

$\frac{24,52 }{440}=0,055$. Or, $\frac{1}{Φ^{6}}=0,055$ ou encore $\frac{Φ}{Φ^{7}}$.

Fa3 / La3

$\frac{345,90}{440}=0,786$. Or, $\frac{\sqrt{Φ}}{Φ}=0,786$. Sin (51,83°) (Chéops).

La4 / La3

$\frac{905,59}{440}=2,058$. Or, $Φ×\sqrt{Φ}=2.058$. De même pour tous les intervalles d’octaves. (Cette valeur $Φ×\sqrt{Φ}$ est typique du tracé de la mandorle gothique, comme $Φ $est typique du tracé de la mandorle romane).

Ré#4 / La3

$\frac{631,23 }{440}=1,4346$. Or, $\sqrt{2,058} $(coeff. Octave) = 1,4346.

Etc etc.

Arrêtons-nous sur ces nouveaux résultats, et comparons-les à des tempéraments déjà rencontrés, toujours entre les extrêmes La-1 / La6 en considérant la fréquence repère La3 = 440 et la valeur centrale Mi3.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | La-1 | Mi3 | La3 (diapason) | La6 |
| TE | 27,50 | 329,63 | **440** | 3520 |
| CHAS | 27,47 | 329,59 | **440** | 3522,80 |
| 12ème pure | 27,42 | 329,53 | **440** | 3527,54 |
| CBO | 27,40 | 329,50 | **440** | 3529,60 |
| TEQJ | 27,28 | 329,36 | **440** | 3540,49 |
| Φ | 24,52 | 325,71 | **440** | 3836,10 |

Nouvelles conclusions :

Le tempérament entièrement basé sur Φ, nous l’avions compris, se déploie vers les extrêmes en hyper extension. L’étirement apparaît d’une telle ampleur que son usage se limitera aux claviers numériques[[8]](#footnote-8). L’application de ce tempérament totalement doré s’adressera plus à des sons de synthèses, sons planants, ou imitant des percussions, marimbas, balafons, cloches, wood blocs...

1. Ce besoin s’est peut-être accentué avec le temps, mais il n’est pas récent. Dominique Devie (P374) cite la découverte par Barbieri d’un texte de Jean-Claude Petit paru vers 1740, dans lequel l’auteur recommande la dilatation des octaves dans les deux sens. [↑](#footnote-ref-1)
2. Houten Kees Van – Basberger Marinus. *Bach et le nombre d’or.* Mardaga. Liège. 1992. [↑](#footnote-ref-2)
3. Compositeurs et nombre d’or : Dufay, Roland de Lassus, Mozart, Haydn, Beethoven, Debussy, Bartok, Ravel, Webern, Xenakis entre autres, et surtout Bach (Guy Marchand. *Bach ou la passion selon Jean-Sébastien.* L’Harmattan. 2005). [↑](#footnote-ref-3)
4. Jedrzejewski. P 227 à 229. [↑](#footnote-ref-4)
5. Dudon Jacques. *The Golden Scale*, PITCH volume 1, number 2. 1987. [↑](#footnote-ref-5)
6. C’était le cas des systèmes irréguliers en vigueur jusqu’au XVIIIème siècle, Kirnberger, Werkmeister, Rameau, D’Alembert etc. mais pas à ce point ?! [↑](#footnote-ref-6)
7. Rappelons le quotient de la terrible quinte du loup : 1,47979 ! [↑](#footnote-ref-7)
8. Le La-1 est en réalité un Sol-1 du TE. Le La6 se situe entre Sib6 et Si6 ! [↑](#footnote-ref-8)